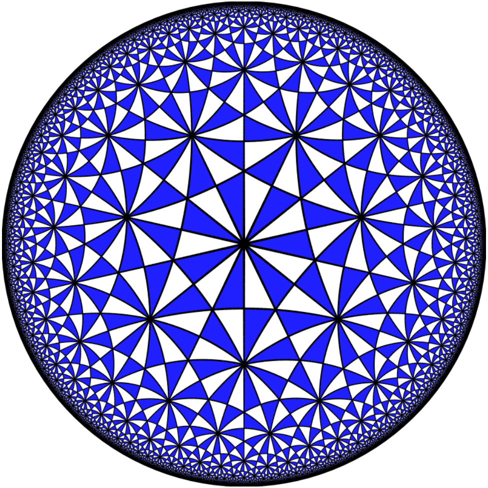
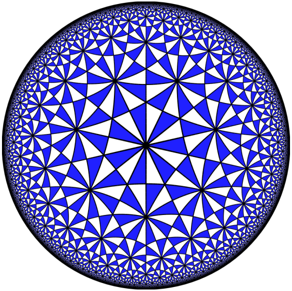
双曲平面の幾何学

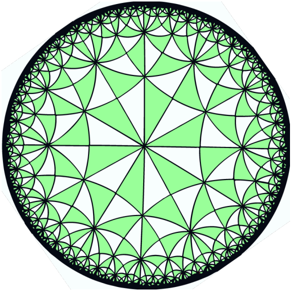
松本 佳彦

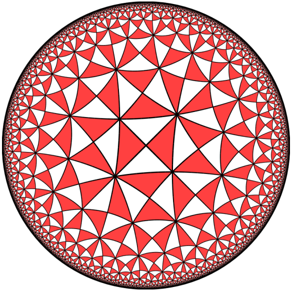
スライドは次のページで公開します
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~matsumoto/index.php?lang=ja



双曲タイリングのいろいろ





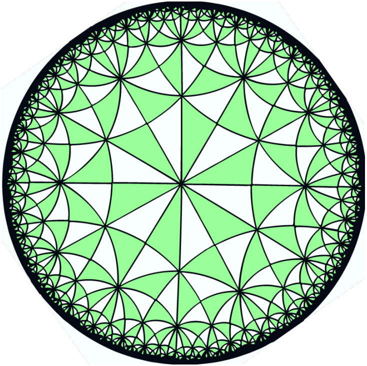


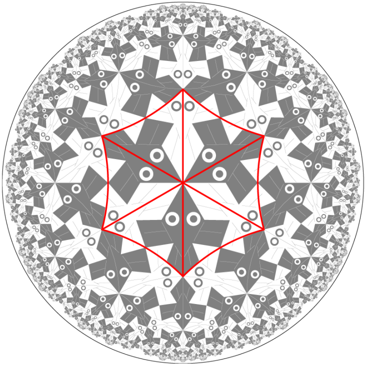
(Left) Claudio Rocchini, *Hyperbolic Order-3 bisected heptagonal tiling* / CC-BY 2.5
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-3_heptakis_heptagonal_tiling.png

(Center) Tom Ruen / Public Domain / Adapted
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hyperbolic_domains_642.png

(Right) Claudio Rocchini, *Hyperbolic Order-4 bisected pentagonal tiling* / CC-BY 2.5
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-4_bisected_pentagonal_tiling.png

美術作品にも使われた

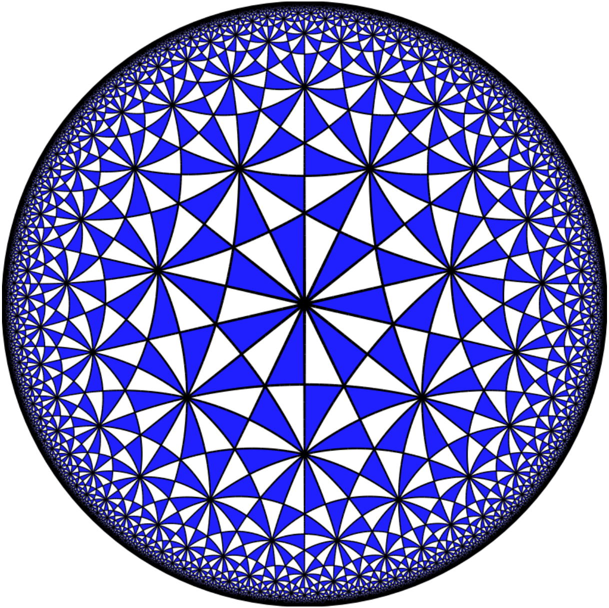




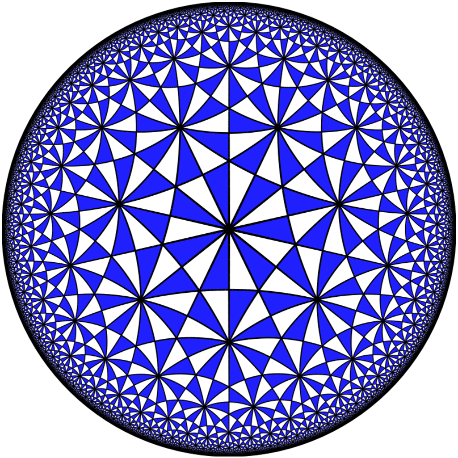
右図は M. C. エッシャー《円の極限 I》(1958) に補助的な線を書き加えたもの．
エッシャーは，数学者 H. S. M. コクセターの論文の挿図から着想を得た．

(Left) Tom Ruen / Public Domain / Adapted
`https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hyperbolic_domains_642.png`

(Right) Quoted from: Douglas Dunham, *Transformation of Hyperbolic Escher Patterns*
`https://www.d.umn.edu/~ddunham/isis4/`

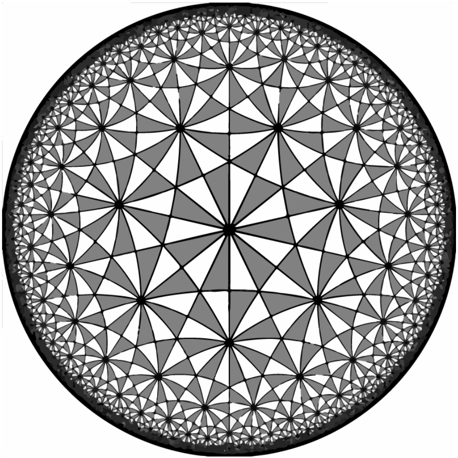


双曲タイリングをじっくり眺めてみよう

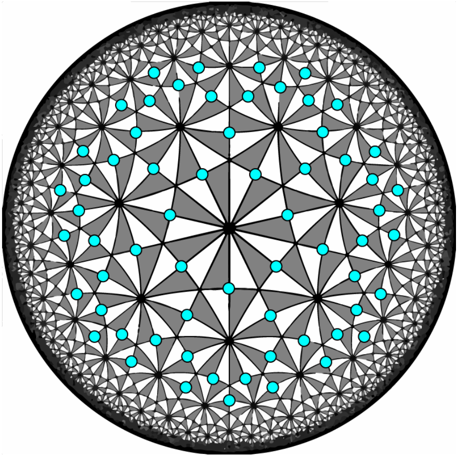


「曲がった三角形」を無限に多く並べることによって円板を敷き詰めている

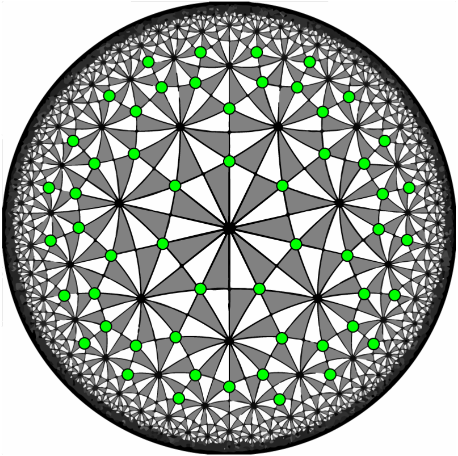
Claudio Rocchini, *Hyperbolic order-3 bisected heptagonal tiling* / CC-BY 2.5
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-3_heptakis_heptagonal_tiling.png`



「曲がった三角形」の「頂点」には 3 種類ある

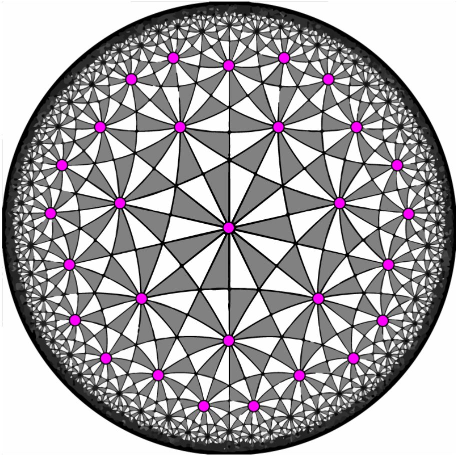


「曲がった三角形」の「頂点」には 3 種類ある：4 個の三角形が集まる頂点

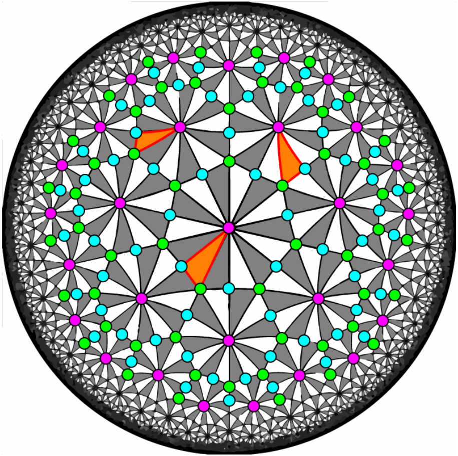


「曲がった三角形」の「頂点」には 3 種類ある：6 個の三角形が集まる頂点

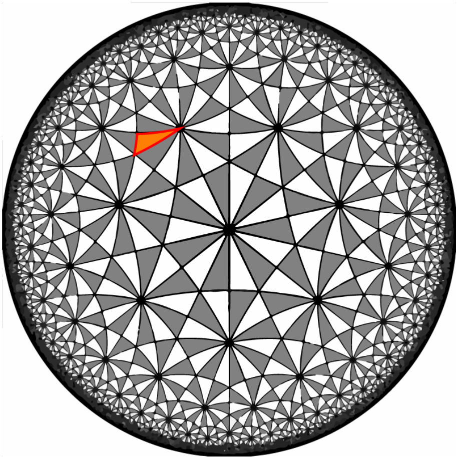
Claudio Rocchini, *Hyperbolic order-3 bisected heptagonal tiling* / CC-BY 2.5 / Adapted
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-3_heptakis_heptagonal_tiling.png



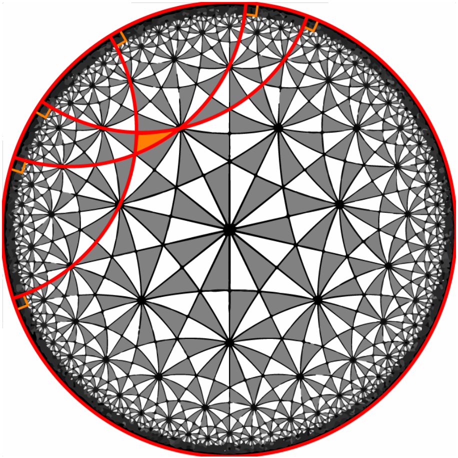
「曲がった三角形」の「頂点」には 3 種類ある：14 個の三角形が集まる頂点



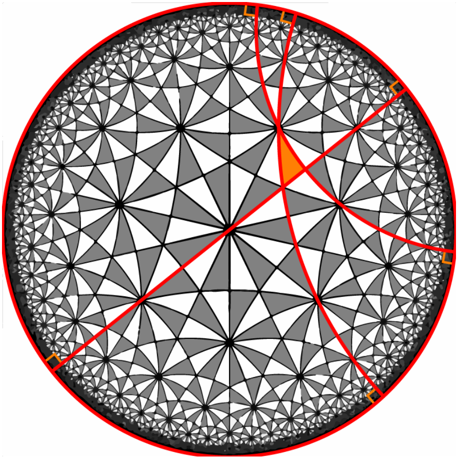
各々の「曲がった三角形」には，3 種類の「頂点」が 1 個ずつある



今度は「曲がった三角形」の「辺」に注目してみる



各々の「辺」を延長すると，外周に直交する円弧になっている



各々の「辺」を延長すると，外周に直交する円弧になっている
（中心を通る直線となる場合もある）

Claudio Rocchini, *Hyperbolic order-3 bisected heptagonal tiling* / CC-BY 2.5 / Adapted
`https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Order-3_heptakis_heptagonal_tiling.png`

双曲平面とはどのような世界か

双曲平面とは

双曲平面——通常の平面（ユークリッド平面）とは異なる「平面」

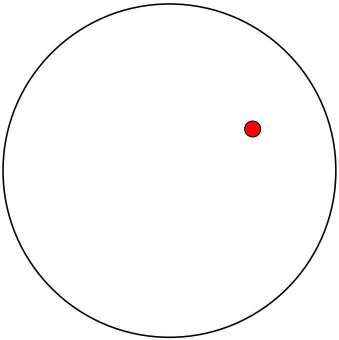
- ユークリッド平面と同様，「点」，「直線」，「円」という概念はある
- しかしそれらは，具体的には，ユークリッド平面の場合と異なる

以下では次のように，色分けして区別する．

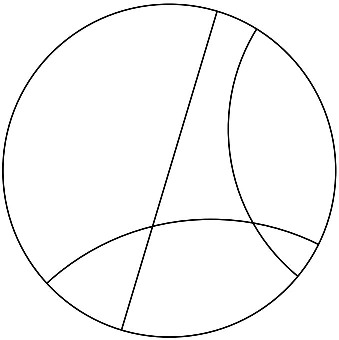
- ユークリッド平面におけるもの：**点**，**直線**，**円**，……
- 双曲平面におけるもの：**点**，**直線**，**円**，……

双曲平面における**点**と**直線**

まずすべての出発点として，外周にあたる円を与えておく．
これを**理想円**と呼ぶことにしよう．さて，何を**点**と呼び，何を**直線**と呼ぶか．



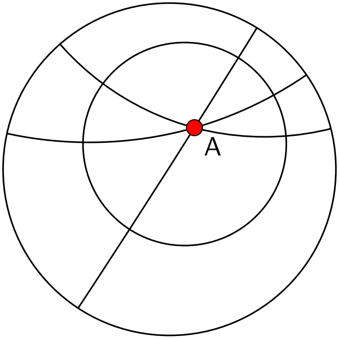
理想円の内側にある**点**だけが
双曲平面における**点**である．



理想円に直交する**円**が
双曲平面における**直線**である．
ただし理想円の中心を通る**直線**も許す．

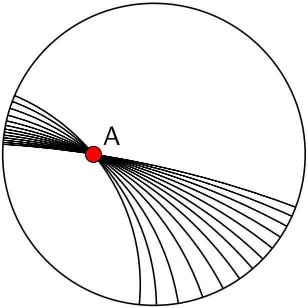
双曲平面における円

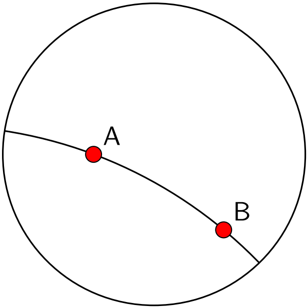
- 双曲平面における円とは，その全体が理想円の内側にあるような円である．
- 点 A を中心とする円は，A を通るすべての直線に直交する．



定理

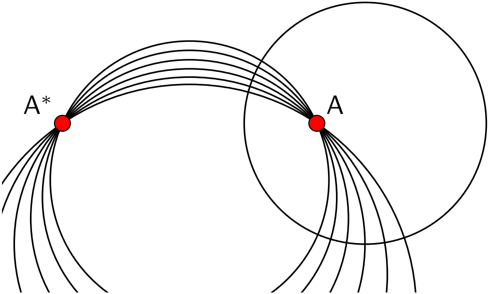
任意の 2 **点**に対し，それらを通る**直線**が 1 本だけ存在する.



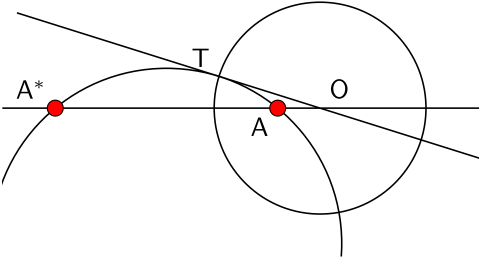


どうしたらそのような**直線**を見つけることができるだろうか？

いきなり 2 点を相手にはせず，まず点 A を通るような**直線**たちを考えよう.
これらの**直線**（ユークリッド幾何的には**円**）についてわかることは？



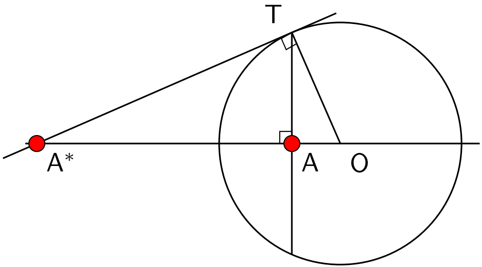
A を通る**直線**が必ず通る点がもう一つある——理想円に関する点 A の**反転**.



理想円の半径を r とすれば,
方べきの定理によって
$\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OA}^* = \mathrm{OT}^2 = r^2$.

A の反転 A^* の作図は右図のようにしてできる.

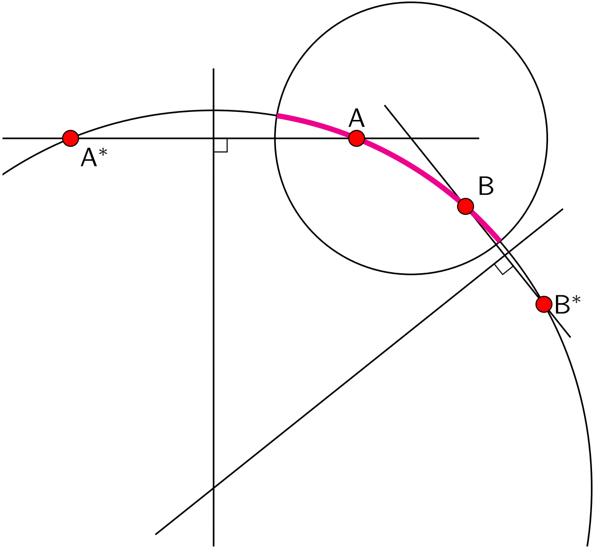
$OA : OT = OT : OA^*$ より
$OA \cdot OA^* = OT^2 = r^2$ となる.

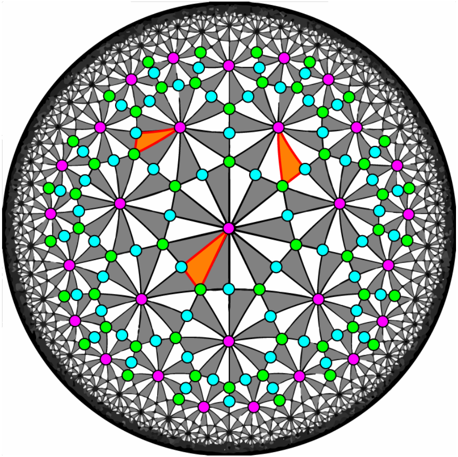


A を通る**直線**は A, A^* を通る**円**なので，中心は AA^* の垂直二等分線上にある！

2 点 A, B を通る**直線**の描き方

1. A の反転 A^* をとり，AA^* の垂直二等分線を引く.
2. B の反転 B^* をとり，BB^* の垂直二等分線を引く.
3. 垂直二等分線同士の交点を中心に A を通る**円**を描けば，それが求める**直線**.

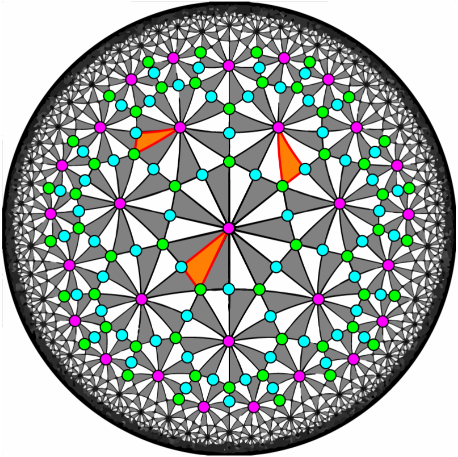

A
A*
B
B*



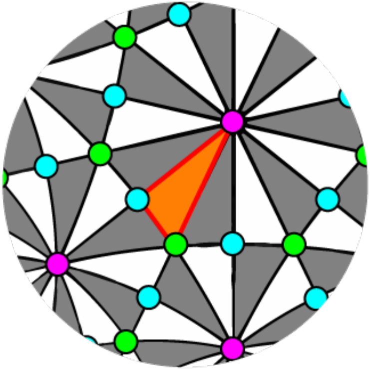
これらはもはや「曲がった三角形」ではなく，双曲平面上の**三角形**である．

双曲平面上の三角形

双曲平面上の三角形

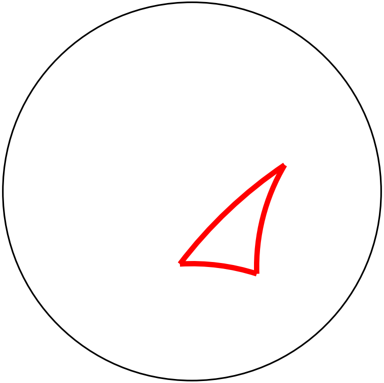


内角の和は？（注：双曲平面での角とは，ユークリッド平面での角と同じ.）



各々の頂点に集まっている三角形の内角は，実は互いに等しい．それを認めると

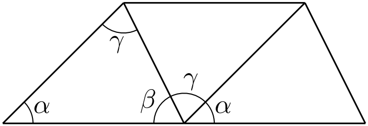
$$\frac{360^\circ}{4} + \frac{360^\circ}{6} + \frac{360^\circ}{14} = 180^\circ \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right) = 180^\circ \times \frac{21 + 14 + 6}{42} < 180^\circ.$$



実はどんな三角形でも同じ．いつでも (内角の和) $< 180^\circ$ になる！

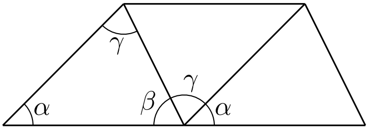
なぜ双曲平面では (三角形の内角の和) $= 180^\circ$ とならないのか

ユークリッド平面では，平行な 2 直線に対し，同位角や錯角は等しい.

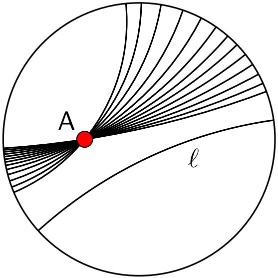


なぜ双曲平面では (三角形の内角の和) $= 180^\circ$ とならないのか

ユークリッド平面では，平行な 2 直線に対し，同位角や錯角は等しい.

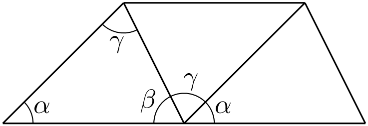


双曲平面ではそうとは限らない！
というのは，与えられた直線 ℓ と点 A に対して，A を通り ℓ に平行な直線は 1 本ではないからである.

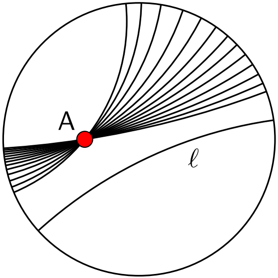


なぜ双曲平面では (三角形の内角の和) $= 180^\circ$ とならないのか

ユークリッド平面では，平行な 2 直線に対し，同位角や錯角は等しい.



双曲平面ではそうとは限らない！
というのは，与えられた直線 ℓ と点 A に対して，A を通り ℓ に平行な直線は 1 本ではないからである.



平行線に関する性質の違いが明暗（？）を分ける.

平行線の公理をめぐる歴史

ユークリッド（エウクレイデス）紀元前 3 世紀頃？
『原論』を著す．古代ギリシャ数学の集大成．

初等幾何学について，ユークリッドは次のような公理（＝議論の前提）を提示し，理論体系を作りあげた．

1. 相異なる 2 点に対し，それらを結ぶ線分が 1 本だけ存在する．
2. 任意の線分は，ただ一通りのやり方でいくらでも延長できる．
3. 与えられた中心と半径に対し，円が 1 つだけ存在する．
4. 直角はすべて等しい．
5. 与えられた直線 ℓ とその上にない点 A について，A を通り ℓ に平行な直線が 1 本だけ存在する．

（上に述べた「平行線の公理」は，オリジナルとは異なるが等価なもの．）

Painter Unknown, *Eukleides of Alexandria* / Public Domain
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euklid-von-Alexandria_1.jpg

多くの人が,「平行線の公理」は不要で，他の公理だけでユークリッド幾何が構築できる（＝「平行線の公理」は証明できる）のではないかと考えた.

- プトレマイオス（2 世紀頃）
- プロクロス（5 世紀）
- G. G. サッケリ (1667–1733)
- J. H. ランベルト (1728–1777)
- A.-M. ルジャンドル (1752–1833)
- ボヤイ F. (1775–1856)

だがロバチェフスキーとボヤイ J. が双曲平面を発見し,「平行線の公理」を肯定しても否定しても矛盾が生じないことが明らかになった.

実は C. F. ガウス (1777–1855) も知っていたが，公表していなかった.

N. I. ロバチェフスキー (1792–1856)

ボヤイ J. (1802–1860)

(Top) Painter Unknown / Public Domain
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nikolay_Ivanovich_Lobachevsky.jpeg

(Bottom) Painter Unknown / Public Domain
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:JanosBolyai.jpg

数学の自由性

数学の本質はその自由性にある.

——G. カントール (1845–1918)

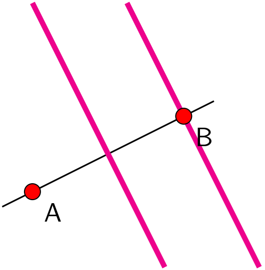
数学では論理を重んじ, 理論の基礎にある前提に細心の注意を払うが,
それは人間の直観や常識のようなものによって想像を縛らないためである.

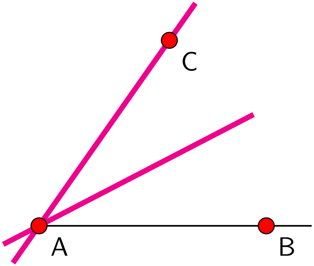
非ユークリッド幾何の発見は, そのような姿勢が最も大きな成功を収めた
例のひとつだろう.

双曲平面上の合同変換

ユークリッド平面における合同変換
＝「平行移動」「回転」「直線に関する折り返し」を組み合わせて得られる変換.
「2 点間の距離を変えない変換」と言ってもよい.

実はすべて「直線に関する折り返し」だけを用いて表すことができる.





点 A を点 B に移す平行移動：

1. AB の垂直二等分線に関する折り返し
2. AB に直交し B を通る直線に関する折り返し

点 A を中心とする角 θ の回転：
$\angle BAC = \theta$ となる B, C をとって

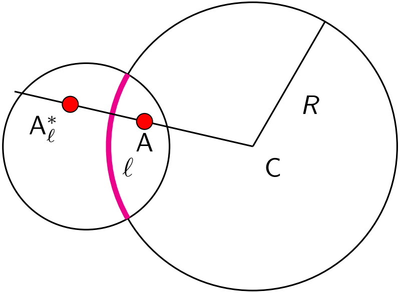
1. $\angle BAC$ の二等分線に関する折り返し
2. AC に関する折り返し

直線に関する反転

双曲平面における直線とは，理想円に直交するような円のこと
（ただし理想円の中心を通る直線も許す）であった．

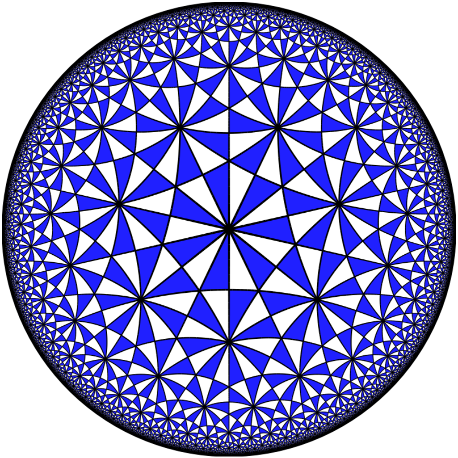
双曲平面の直線 ℓ と点 A に対し，ℓ に関する A の**反転** A_ℓ^* を次のように定義する．

- ℓ が理想円の中心を通る直線のとき：
  ユークリッド幾何の意味で
  ℓ に関する折り返しによって A の移る点を
  A_ℓ^* とする．
- ℓ がユークリッド平面での円のとき：
  理想円に関する反転と同じように
  ℓ に関する反転を定める（右図参照）．



$$\mathrm{CA} \cdot \mathrm{CA}_\ell^* = R^2$$

直線に関する反転を繰り返すことによって得られる変換のことを
双曲平面の合同変換と呼ぶ．これらは双曲平面上の 2 点間の距離を変えない．



隣り合った三角形は，共有する辺を延長して得られる**直線**に関する反転で重なり合うように描かれている．したがってすべての三角形は合同である．

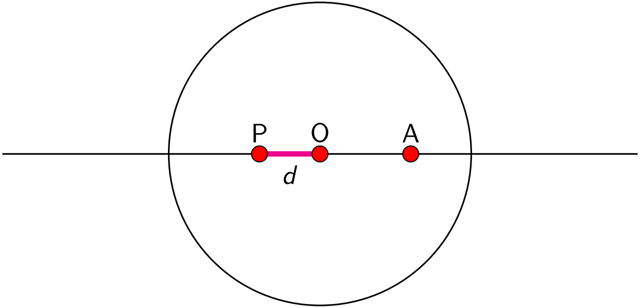
問

双曲平面における「一定の長さの線分」は，ユークリッド平面人の目には位置によって長さが変化するように見える．具体的にはどのように変化するか？

問

双曲平面における「一定の長さの線分」は，ユークリッド平面人の目には位置によって長さが変化するように見える．具体的にはどのように変化するか？

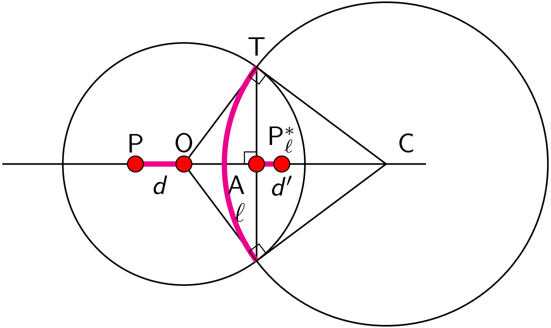
最も簡単なケースだけを取り扱う．
理想円が原点 O を中心とする単位円になっているような座標系において，
O を一方の端，P$(0, -d)$ ($d > 0$) をもう一方の端とする線分を考える．



これを，x 軸に直交するような**直線**に関して反転して，
O が点 A$(x, 0)$ ($x > 0$) に移るようにすると，線分の長さはどうなるか？

右図の ℓ に関して反転すれば
O は A に移る.
$\mathrm{OA} = x$ より $\mathrm{OC} = 1/x$ で,

$$\mathrm{CA} = \frac{1-x^2}{x},$$
$$\mathrm{CT} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

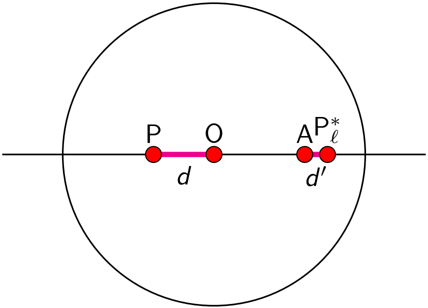


$\mathrm{AP}_\ell^* = d'$ とおくと $\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CP}_\ell^* = (\mathrm{CO}+d)(\mathrm{CA}-d') = \mathrm{CT}^2$, すなわち

$$\left(\frac{1}{x}+d\right)\left(\frac{1-x^2}{x}-d'\right) = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

d' について解いて $d' = \left(\frac{1}{x}+d\right)^{-1}\frac{1-x^2}{x}d$. d が非常に小さいとき

$$d' \sim (1-x^2)d. \qquad \text{(あるいは } \lim_{d\to 0}\frac{d'}{d} = 1-x^2 \text{ と言ってもよい.)}$$



双曲幾何的な長さの等しい 2 つの短い線分が,
点 O$(0, 0)$ と点 A$(x, 0)$ に，いずれも x 軸方向に置かれているとき,
それらのユークリッド幾何的な長さの比は，ほぼ $1 : (1 - x^2)$ である.

実は「いずれも x 軸方向に」は不要である.（計算してみよう！）